Classes de complexité. Approximation

Sergey Kirgizov

Exemple : couverture par sommets

Vertex cover

Un graph $G(V, E)$

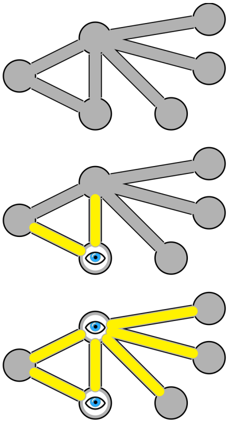
- V un ensemble de sommets (nœds)
- E un ensemble d'arêtes (liens)

Couverture par sommets est

un ensemble C de sommets t.q. chaque arête de G = (V, E) est incidente à au moins un sommet de C.

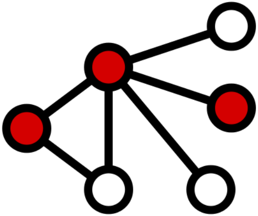
Couverture minimale par sommets

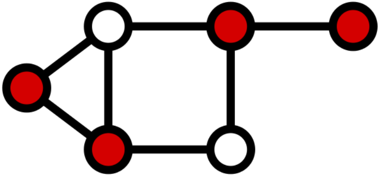
Problème de décision : y a-t-il une couverture par sommets de taille au plus k ? **Ce problème est NP-complet**



src : Fschwarzentruber @ Wikipédia

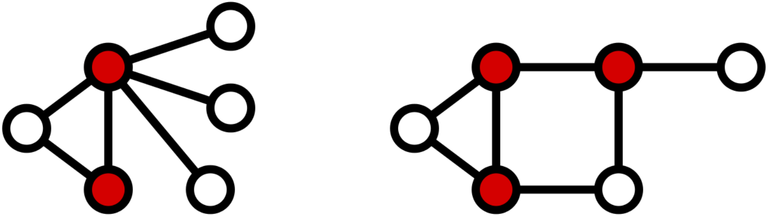
Exemples des couvertures





src : Miym @ Wikipédia

Exemples des couvertures minimales



src : Miym @ Wikipédia

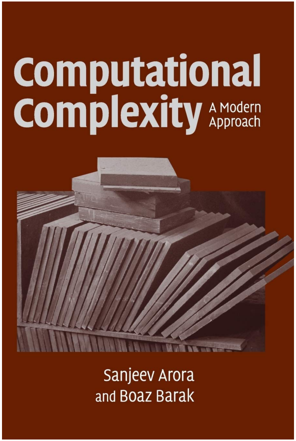
Plan

Classes de complexité

- P
- NP
- NP-complet

Algorithmes d'approximation

- Exemple : couverture par sommets



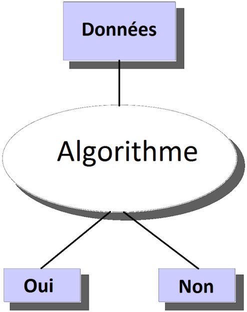
Computational Complexity : A Modern Approach

Sanjeev Arora and Boaz Barak

https://theory.cs.princeton.edu/complexity/book.pdf

Classe de complexité

Problème de décision



Il existe des techniques standards pour transformer les problèmes de décision vers des problèmes d'optimisation.

Un problème de décision est dans la classe P s'il est décidé par une machine de Turing déterministe en temps polynomial par rapport à la taille de l'entrée.

Plus d'info `https://fr.wikipedia.org/wiki/P_(complexitÃľ)`

NP

Un problème de décision est dans la classe *NP* s'il est décidé par une machine de Turing non déterministe en temps polynomial par rapport à la taille de l'entré.

Plus d'info `https://fr.wikipedia.org/wiki/NP_(complexitÃĪ)`

On peut vérifier en temps polynomial si une solution candidate est vraiment une bonne solution.

$$P = NP?$$

L'Institut de mathématiques Clay a inclus ce problème dans sa liste des sept problèmes du prix du millénaire, et offre à ce titre un million de dollars à quiconque sera en mesure de démontrer $P = NP$ ou $P \neq NP$ ou de démontrer que ce n'est pas démontrable.

Réduction polynomiale

Un problème Π est NP-complet s'il est dans la classe NP et si tout autre problème de NP peut se réduire (se transformer) à Π par une réduction polynomiale.

Réduction polynomiale

Transformer un problème vers un autre en temps polynomial

NP-complet

Un problème de décision Π est *NP-complet* si

- Π est dans la classe *NP*
- pour tout $\Gamma \in NP$ il existe une réduction polynomiale de Γ vers Π.

Problème de satisfaisabilité booléenne

SAT

Les formules de la logique propositionnelle sont construites à partir de variables propositionnelles et des connecteurs booléens "et" ($\wedge$), "ou" ($\vee$), "non" ($\neg$).

Une formule est **satisfaisable** (on dit aussi **satisfiable**) s'il existe une assignation des variables propositionnelles qui rend la formule logiquement vraie.

Exemples :

- $(p \wedge q) \vee \neg p$ est satisfaisable, $p = 0$.
- $(p \wedge \neg p)$ n'est pas satisfaisable car aucune valeur de p ne peut rendre la formule vraie.

Théorème de Cook-Levin

le problème SAT est NP-complet. 1971

https://fr.wikipedia.org/wiki/ProblÃĺme_SAT

Stephen Cook

21 problèmes NP-complets de Karp

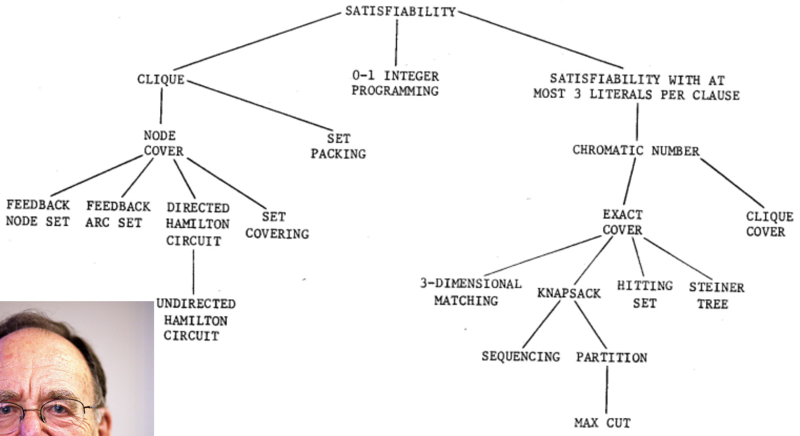


FIGURE 1 - Complete Problems

“Reducibility Among Combinatorial Problems”, 1972. Richard Karp.

Algorithmes d'approximation

Facteur d'approximation

Imaginons un problème de minimisation.

- x c'est l'entrée.
- Solution optimale $s^*(x)$.
- Solution par un autre algorithme $s(x)$.

On dit qu'un algorithme est p-approché. Si pour pour toute entrée x on a une garantie

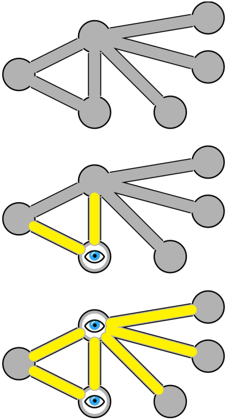
$$s(x) \leq ps^*(x)$$

Exemple : couverture par sommets

Vertex cover

Un graph $G(V, E)$

- V un ensemble de sommets (nœds)
- E un ensemble d'arêtes (liens)



src : Fschwarzentruber @ Wikipédia

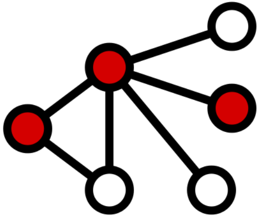
Couverture par sommets est

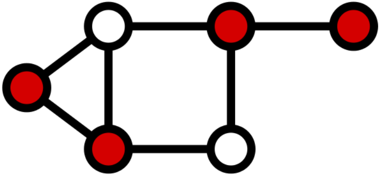
un ensemble C de sommets t.q. chaque arête de G = (V, E) est incidente à au moins un sommet de C.

Couverture minimale par sommets

Problème de décision : y a-t-il une couverture par sommets de taille au plus k ? **Ce problème est NP-complet**

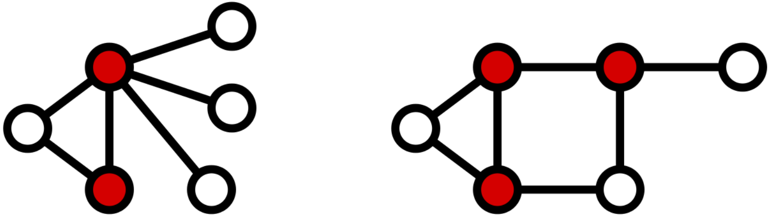
Exemples des couvertures





src : Miym @ Wikipédia

Exemples des couvertures minimales



src : Miym @ Wikipédia

2-approximation de la couverture

Pour chaque arête (u, v)

- ajouter les deux extrémités u et v dans la couverture
- supprimer tous les arêtes incidents aux sommets u et v.

Algorithme est découvert indépendamment par Fanica Gavril and Mihalis Yannakakis

Exercice 1 :

Calculer la complexité de l'algorithme.

Exercice 2 :

- C : la couverture trouvée par cet algorithme.
- $C_{\min}$: la couverture minimale

Montrez que $|C| < 2|C_{min}|$

2-approximation de la couverture

Pour chaque arête (u, v)

- ajouter les deux extrémités u et v dans la couverture
- supprimer tous les arêtes incidents aux sommets u et v.

Algorithme est découvert indépendamment par Fanica Gavril and Mihalis Yannakakis

Exercice 1 :

Calculer la complexité de l'algorithme.

Exercice 2 :

- C : la couverture trouvée par cet algorithme.
- $C_{\min}$: la couverture minimale

Montrez que $|C| < 2|C_{min}|$

2-approximation de la couverture. L'idée de preuve

Algorithme

Pour chaque arête (u, v) **faire :**

- ajouter les deux extrémités u et v dans la couverture
- supprimer tous les arêtes incidents aux sommets u et v.

- Remarquons que ça donne bien une couverture.

2-approximation de la couverture. L'idée de preuve

Algorithme

Pour chaque arête (u, v) **faire :**

- ajouter les deux extrémités u et v dans la couverture
- supprimer tous les arêtes incidents aux sommets u et v.

- Remarquons que ça donne bien une couverture.
- Soit L l'ensemble d'arêtes considérées mais non supprimées par l'algorithme. Soit une arête $(a, b) \in L$. Toute couverture, y compris une couverture minimale, doit contenir a ou b (ou les deux) ; sinon l'arête (a, b) n'est pas couverte. Autrement dit, une couverture minimale contient au moins un point d'extrémité de l'arête (a, b). Au total, l'ensemble de sommets de L est au plus 2 fois plus grand que l'ensemble de sommets de la couverture minimale.

Questions ?